OLIMPÍADAS
PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

http://www.spm.pt/olimpiadas

XXVIII OPM - 1ª Eliminatória - 11.11.2009 - Categoria A - 8º/9º

Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

1. O galão inicialmente tinha $0,4 \times 24 = 9,6$ cl de café. Depois de a D. Júlia ter juntado leite, o galão ficou com $100\% - 80\% = 20\%$ de café. Portanto o volume total do galão é $\frac{100}{20} \times 9,6 = 48$ cl. Logo foram adicionados $48 - 24 = 24$ cl de leite.

2. Sejam $a \leq b \leq c$ as medidas dos três lados do triângulo. Podemos formar um triângulo com lados a, b, c se $a + b > c$.

   Solução 1:

   Para $c = 5$, só temos a possibilidade $(a = 5, b = 5)$.

   Para $c = 10$, temos as possibilidades $(a = 5, b = 10)$ e $(a = 10, b = 10)$.

   Para $c = 15$, temos as possibilidades $(a = 5, b = 15)$, $(a = 10, b = 10)$, $(a = 10, b = 15)$ e $(a = 15, b = 15)$.

   Para $c = 20$, temos as possibilidades $(a = 5, b = 20)$, $(a = 10, b = 15)$, $(a = 10, b = 20)$, $(a = 15, b = 15)$, $(a = 15, b = 20)$ e $(a = 20, b = 20)$.

   Portanto, podem formar-se 13 triângulos distintos com os lápis do Frederico.

   Solução 2:

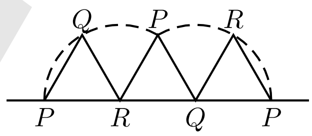
   Se o triângulo é equilátero , isto é, se $a = b = c$, temos quatro possibilidades para o triângulo.

   Se o triângulo é isósceles, tem-se $a < b = c$ ou $a = b < c$. Se $a < b = c$, a condição $a + b > c$ verifica-se sempre e temos as possibilidades $(a = 5, c = 10)$, $(a = 5, c = 15)$, $(a = 5, c = 20)$, $(a = 10, c = 15)$, $(a = 10, c = 20)$ e $(a = 15, c = 20)$. Se $a = b < c$ a condição $a + b > c$ apenas se verifica para as possibilidades $(a = 10, c = 15)$ e $(a = 15, c = 20)$. Logo temos $6 + 2 = 8$ possibilidades.

   Se o triângulo é escaleno, isto é, se $a < b < c$, então a condição $a + b > c$ só se verifica para $a = 10, b = 15, c = 20$.

   Portanto, podem formar-se 13 triângulos distintos com os lápis do Frederico.

3. No primeiro movimento o ponto P roda em torno do ponto R, descrevendo um arco de circunferência de raio 1 cm e amplitude $120°$, uma vez que os ângulos internos de um triângulo equilátero têm $60°$. O comprimento desta trajectória é $2\pi\dfrac{120}{360} = \dfrac{2\pi}{3}$ cm.



   Do mesmo modo, no segundo movimento o ponto P roda em torno do ponto Q, descrevendo também uma trajectória de comprimento $2\pi/3$ cm. Portanto o comprimento total da trajectória descrita pelo ponto P é $4\pi/3$ cm.

4. **Solução 1:** Pretende-se encontrar os números da forma $ab45$, múltiplos de 45, ou seja, simultaneamente múltiplos de 5 e de 9. Como $ab45$ é sempre múltiplo de 5, porque o seu algarismo das unidades é 5, basta procurar os números da forma $ab45$ múltiplos de 9. Como os múltiplos de 9 são os números cuja soma dos algarismos é múltipla de 9, pretende-se que $a + b + 4 + 5$ seja um múltiplo de 9. Isto acontece para $(a, b) = (1, 8), (2, 7), (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3), (7, 2), (8, 1), (9, 0), (9, 9)$, pelo que há 10 números nas condições pedidas.

Solução 2: Se um número inteiro n de 4 algarismos acaba em 45, é da forma $100k + 45$, onde $k \in \{10, 11, \ldots, 99\}$.

Se 45 divide $n = 100k + 45$, então 45 divide $100k$, logo 5 divide $100k$ e 9 divide $100k$.

Ora, qualquer que seja o k, 5 divide $100k$, portanto esta condição não nos restringe as possibilidades para k. Como $m.d.c.(100, 9) = 1$ e 9 divide $100k$, conclui-se que 9 divide k, portanto k tem de pertencer ao conjunto dos múltiplos de 9 entre 10 e 99, ou seja, a $\{18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, 99\}$.

Há portanto 10 números nas condições pedidas.